Varianta 49

Subiectul I.

a) $\text{Re}(z) = -1$.

b) 5.

c) $\cos^2 75^\circ + \cos^2 15^\circ = 1$.

d) Unicul punct de intersecție dintre dreaptă şi cerc este $A(0,1)$.

e) Există un singur punct cu proprietatea din enunț: $O(0,0)$.

f) $y = 3x$.

Subiectul II.

1.

a) $a < b$.

b) 30.

c) Există trei numere care satisfac enunțul.

d) Există două numere care satisfac enunțul.

e) $f = X^3 - 2 \in \mathbf{Z}[X]$.

2.

a) $f'(x) = \dfrac{2(3 - x^2)}{(x^2+3)^2}, \ \forall x \in \mathbf{R}$.

b) $x = -\sqrt{3}$ şi $x = \sqrt{3}$ sunt punctele de extrem ale lui f.

c) $a > b$.

d) Dreapta $Ox : y = 0$ este asimptota (orizontală) spre $+\infty$ la graficul funcției f.

e) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \ln\frac{4}{3}$.

Subiectul III.

a) $f(1) = 1 - (\cos 2na + i\cdot\sin 2na)$ şi $f(-1) = (-1)^n - (\cos 2na + i\cdot\sin 2na)$.

b) Calcul direct.

c) Calcul direct

d) Evident.

e) Deoarece $x_0, x_1, ..., x_{n-1} \in \mathbf{C}$ sunt rădăcinile polinomului f, putem scrie

$$f = \prod_{k=0}^{n-1}(X - x_k) \overset{\text{d)}}{=} \prod_{k=0}^{n-1}\left(X - \left(\cos\left(2a + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\cdot\sin\left(2a + \frac{2k\pi}{n}\right)\right)\right).$$

f) Din **a)** şi **b)** deducem:

$$f(1) = 1 - (\cos 2na + i\cdot\sin 2na) = -2i\cdot\sin na\cdot(\cos na + i\cdot\sin na) \qquad (1)$$

Folosind **e)** obținem:

$$f(1)=\prod_{k=0}^{n-1}\left(1-\left(\cos\left(2a+\frac{2k\pi}{n}\right)+i\cdot\sin\left(2a+\frac{2k\pi}{n}\right)\right)\right)\overset{\text{b)}}{=}$$

$$=\prod_{k=0}^{n-1}\left(-2i\cdot\sin\left(a+\frac{k\pi}{n}\right)\right)\left(\cos\left(a+\frac{k\pi}{n}\right)+i\cdot\sin\left(a+\frac{k\pi}{n}\right)\right)=$$

$$=(-2i)^n\cdot(\cos na+i\cdot\sin na)\cdot\left(\cos\left(\frac{(n-1)\pi}{2}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{2}\right)\right)\cdot\prod_{k=0}^{n-1}\sin\left(a+\frac{k\pi}{n}\right).$$

În plus, $\forall\, a\in\mathbf{R}$, $\forall\, n\in\mathbf{N}$, $n\geq 3$, $(-2i)^n\cdot\left(\cos\left(\frac{(n-1)\pi}{2}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{2}\right)\right)=-2^n\cdot i$

Ținând cont de (1), deducem concluzia.

g) Din **a)** şi c**)** deducem, pentru $n=2p+1$, cu $p\in\mathbf{N}^*$:

$$f(-1)=-2\cos(2p+1)a\cdot(\cos(2p+1)a+i\cdot\sin(2p+1)a) \qquad (2)$$

Din **e)** obținem: $f(-1)=\prod_{k=0}^{2p}\left(-1-\left(\cos\left(2a+\frac{2k\pi}{2p+1}\right)+i\cdot\sin\left(2a+\frac{2k\pi}{2p+1}\right)\right)\right)\overset{\text{c)}}{=}$

$$=\prod_{k=0}^{2p}\left(-2\cos\left(a+\frac{k\pi}{2p+1}\right)\right)\left(\cos\left(a+\frac{k\pi}{2p+1}\right)+i\cdot\sin\left(a+\frac{k\pi}{2p+1}\right)\right)=$$

$$=-2^{2p+1}\cdot(-1)^p\cdot(\cos(2p+1)a+i\cdot\sin(2p+1)a)\cdot\prod_{k=0}^{2p}\cos\left(a+\frac{k\pi}{2p+1}\right)$$

şi ținând cont de (2) deducem concluzia.

Subiectul IV.

a) Calcul direct.

b) Evident.

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{e}+\frac{1}{e^2}+\ldots+\frac{1}{e^n}\right)\overset{\text{b)}}{=}\frac{e}{e-1}$.

d) Pentru $x\in\mathbf{R}$, deoarece f este continuă în 0, $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(x\cdot e^{-n-1}\right)=f(0)$.

e) Evident, înlocuind x cu $\frac{x}{e}\in\mathbf{R}$ în relația din enunț.

f) Evident, înlocuind x cu $\frac{x}{e^n}\in\mathbf{R}$ în relația din enunț.

g) Din **f)**, dându-i succesiv lui n valorile 0, 1, 2, ..., n şi adunând relațiile, rezultă:

$f(x)-f\left(\frac{x}{e^{n+1}}\right)=x\cdot\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{e^k}$ şi $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(x\cdot\left(1+\frac{1}{e}+\ldots+\frac{1}{e^n}\right)+f\left(\frac{x}{e^{n+1}}\right)\right)\overset{\text{c), d)}}{=}\frac{x\cdot e}{e-1}+f(0)$

Funcțiile continue cu proprietatea din enunț sunt:

$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\frac{x\cdot e}{e-1}+a$, cu $a\in\mathbf{R}$.